ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

PUNTO MATERIALE

Corpo che può essere considerato puntiforme (le cui dimensioni spaziali sono 'molto piccole' rispetto all'ambiente nel quale si studia il suo moto.

POSIZIONE DI UN PUNTO MATERIALE

Indipendentemente dal sistema adottato, sono tre le informazioni necessarie per individuarne la posizione nello spazio.

Vi è una corrispondenza biunivoca tra la rappresentazione geometrica (segmento orientato) e la rappresentazione analitica (terna di coordinate).

$$\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P, z_P)$$

La lunghezza del segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ (distanza punto-origine) è chiamata MODULO o INTENSITÀ

$$|\overrightarrow{OP}| \equiv |\vec{P}| \equiv P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} = \sqrt{\vec{P} \cdot \vec{P}}$$

MOLTIPLICAZIONE VETTORE PER SCALARE

$$s\vec{a} = (s a_x, s a_y, s a_z) = \vec{b} \qquad \boxed{\vec{b} \parallel \vec{a}}$$

$$|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$$

VERSORI

Modulo unitario, pura direzione e verso.

$$s = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

s: quantità scalare positiva

$$s\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right)$$

$$|s\vec{a}| = |s||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$$

Il concetto di versore $\vec{n}_a$ è utile a indicare direzione e verso del vettore $\vec{a}$ (direzioni orientate).

Si definiscono versori degli assi cartesiani:

$\vec{i} = (1,0,0)$ asse x $\quad \vec{j}\ (0,1,0)$ asse y $\quad \vec{K}\ (0,0,1)$ asse z

SOMMA DI VETTORI

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$(\vec{a} + \vec{b}) = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$

Il vettore risultante coincide con la diagonale del parallelogramma di lati $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Utilizzando le operazioni di somma tra vettori e moltiplicazione di vettore per scalare si ha:

$a_x\vec{i} = (a_x, 0, 0)$

$a_y\vec{j} = (0, a_y, 0)$

$a_z\vec{K} = (0, 0, a_z)$

$(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{K}) = (a_x, a_y, a_z) = \vec{a}$

ANGOLO TRA VETTORI

Angolo compreso tra due vettori (ovvero tra le loro direzioni orientate) il più piccolo dei due angoli individuabili (quindi sempre compreso tra 0 e π rad.)

PRODOTTO SCALARE

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$ ← quantità scalare

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{ab \cos\theta}$ ← angolo tra i due vettori

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

COMPONENTE DI UN VETTORE SECONDO UNA DIREZIONE ORIENTATA

Direzione orientata individuata da un versore $\vec{n}$.

$a_n = \vec{a} \cdot \vec{n} = a \cos\theta$ ($\vec{n}$ = modulo unitario)

Segue: $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}$ $\quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}$ $\quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}$

VETTORI NON APPLICATI

In generale possiamo dire che, fissato un sistema di assi cartesiani (e i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), tutti i vettori che hanno uguali rispettivamente il modulo, la direzione e il verso, sono rappresentati dalla stessa terna di componenti (indipendentemente dal punto di applicazione).

SOMMA DI N VETTORI:
Partendo dal primo si disegnano i vettori in maniera tale che il punto di applicazione del successivo corrisponda alla punta del precedente, il vettore somma si ottiene congiungendo il punto di applicazione del primo con la punta dell'ultimo

PROPRIETÀ FORMALI:

$$\begin{cases} s(\vec{a}+\vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b} \\ \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} (s_1+s_2)\vec{a} = s_1\vec{a} + s_2\vec{a} \\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \end{cases}$$

(propr. commutative) (propr. associative)

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \\ s\vec{a}\cdot\vec{b} = (s\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(s\vec{b}) \end{cases} \qquad \left\{ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} \right\}$$

(propr. distributiva della somma rispetto al prodotto)

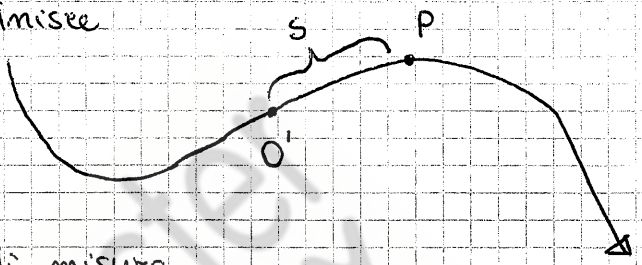
master COPY COPISTERIA

CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

La cinematica del punto materiale definisce quelle grandezze quali la posizione, la velocità e l'accelerazione che caratterizzano il moto di un punto.

DESCRIZIONE "SCALARE"

Fissata la traiettoria, un SISTEMA DI ASCISSE CURVILINEE si definisce scegliendo:



(i) un'origine O'

(ii) un verso

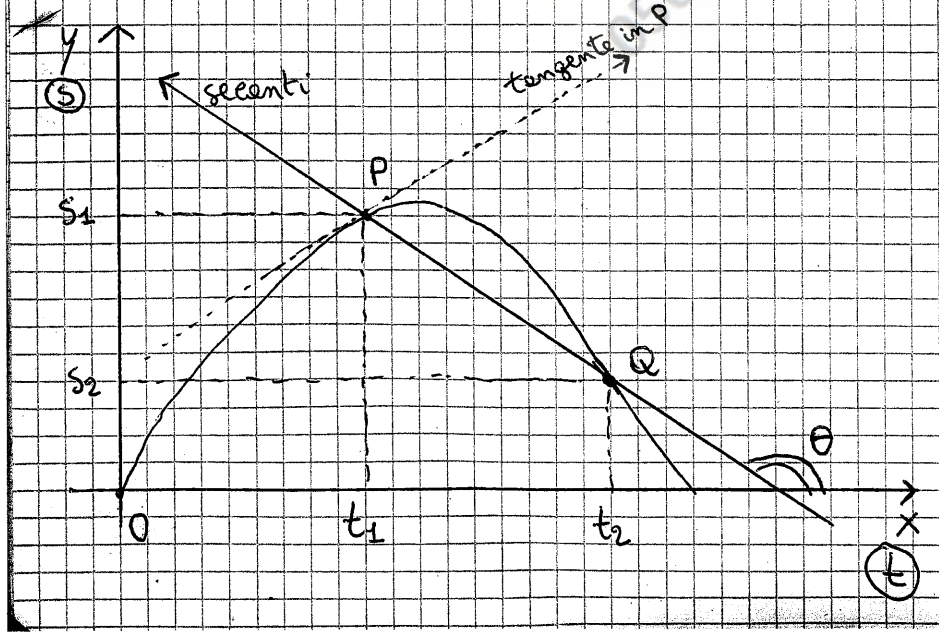
(iii) un sistema di unità di misura.

La posizione del punto P sulla traiettoria è (univocamente) definita dall' ASCISSA CURVILINEA s.

La conoscenza dell'ascissa curvilinea in funzione del tempo permette di definire, istante per istante, la posizione del punto sulla traiettoria: il legame tra s e t si dice LEGGE (O EQUAZIONE) ORARIA.

A partire dall'ascissa curvilinea si definiscono le seguenti quantità:

VELOCITÀ SCALARE MEDIA



Con riferimento al grafico, consideriamo due istanti t_1 e t_2 e siano s_1 e s_2 le ascisse curvilinee occupate dal punto in tali istanti.

Una prima informazione sul moto in $\Delta t = t_2 - t_1$ è rappresentata dal rapporto tra la variazione di ascisse curvilinee Δs in tale intervallo di tempo e la durata Δt di questo.

$$v_s^m(t_1, t_2) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \Delta t = t_2 - t_1 > 0$$

Naturalmente si tratta solo di un'informazione MEDIA su quanto è accaduto alla pallina tra t_1 e t_2; in effetti, la sola conoscenza delle posizioni in tali istanti non permette di stabilire se, per esempio, in caso di velocità nulla, sia stato fermo tutto il tempo o se sia ritornato allo stesso punto da cui è partito.
Perciò viene definita VELOCITÀ SCALARE MEDIA.

Considerata la retta secante i punti P e Q, orientata sempre verso l'alto, la velocità scalare media è rappresentata numericamente dalla tangente che la retta secante forma con l'asse x' nelle opportune unità di misura.
(SI RICORDA CHE DUE DIREZIONI ORIENTATE INDIVIDUANO UN SOLO ANGOLO θ).

VELOCITÀ SCALARE ISTANTANEA

Una descrizione più PUNTUALE delle caratteristiche del moto si ottiene studiando come si comporta la v_s^m al ridursi della durata dell'intervallo temporale Δt.
Tale descrizione viene data dal valore limite della velocità media per Δt che tende a zero.
Si definisce perciò VELOCITÀ SCALARE (ISTANTANEA) al tempo t:

$$v_s(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$